

Sie nun

$$U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, } f \in C^2(U, \mathbb{R})$$

Für $a \in U$ gilt: $(u, v \in \mathbb{R}^n)$

$$f''(a)(u, v) = \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) u_i v_j$$

$\Rightarrow$ die quadratische Form (a fest)

$$v \mapsto f''(a)(v, v)$$

wird beschrieben durch die (symm.)

Hesse-Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Sei a kritischer Punkt und etwa

$f''(a)$ positiv definit.

Nach Taylor ist für $v \in \mathbb{R}^n$ mit

$$a + tv \in U, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(erfüllbar für $|v| \ll 1$)

$$f(a+v) = f(a) + \nabla f(a) \cdot v + \frac{1}{2} f^{(2)}(a+\vartheta v)(v, v)$$

mit einem $\vartheta \in (0,1)$.

Offenbar: $f^{(2)}(a+\vartheta v)$ auch positiv

definit [wegen Stetigkeit von

$$x \mapsto f^{(2)}(x)] \quad \xrightarrow{\quad} \quad \nabla f(a) = 0$$

$$f(a+v) > f(a)$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $0 < |v| < \delta$,

d.h. f hat in a ein strenges
lokales Minimum.

Satz 20.5: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U)$,

$a \in U$ sei kritischer Punkt von f .

Dann gilt:

(i) $D^2 f(a)$ positiv definit $\implies$
 a ist strenges lokales Minimum

(ii) $\dots$ negativ $\dots \implies \dots$ Max $\dots$

(iii) $D^2 f(a)$ indefinit $\implies$
 a keine lokale Extremstelle

Beweis: (i), (ii) ✓

(iii) es gibt also $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit z.B.

$$\varphi^{(2)}(a)(u, u) < 0 < \varphi^{(2)}(a)(v, v);$$

dann betrachte

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \mapsto \varphi(a + tu)$$

und benutze Taylor: $\exists \eta \in (0, 1)$ mit

$$\begin{aligned} \varphi(a + tu) &= \varphi(a) + \nabla \varphi(a) \cdot (tu) \\ &\quad + \varphi^{(2)}(a + \eta tu)(tu, tu) \end{aligned}$$

$$= \varphi(a) + \varphi^{(2)}(a + \eta tu)(u, u) \cdot t^2;$$

brachte:

$$\varphi^{(2)}(a)(u, u) < 0 \implies$$

$$(*) \quad \varphi^{(2)}(\xi)(u, u) < 0 \quad \text{für } \xi \text{ nahe } a$$

wählt man also ε klein genug,

so ist $\xi := a + \delta \pm u$ "zulässig" in $\otimes$

$$\Rightarrow f(a + \pm u) < f(a)$$

$$\forall \pm \in (-\varepsilon, \varepsilon), \underline{\underline{\pm \neq 0}}$$

und analog $f(a + \pm v) > f(a)$ -11-

M.a.W.: a ist kein lokales Extremum $\square$

Korollar: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U)$,
 $a \in U$ sei kritischer Punkt von f .

Dann gilt:

a lokales Max (Min) $\Rightarrow$
 $f''(a)$ negativ (positiv) semidefinit

Beweis: Sei a lokales Max.

Annahme: $f''(a)$ nicht negativ semidefinit

$$\Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n: f''(a)(v, v) > 0$$

Zeige wie oben: $f(a) < f(a + tv)$
für $t \neq 0$, $|t| \ll 1$, Wspr. □

Zurück zum

Beispiel: $f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$,
 $U := \mathbb{R}^2$

$(1, 1)$ ist kritischer Punkt; es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$$

$$\Rightarrow D^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

-35-

Zeige: eine symmetrische 2×2 Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ ist}$$

pos. def. $\iff a > 0$ und $\det > 0$

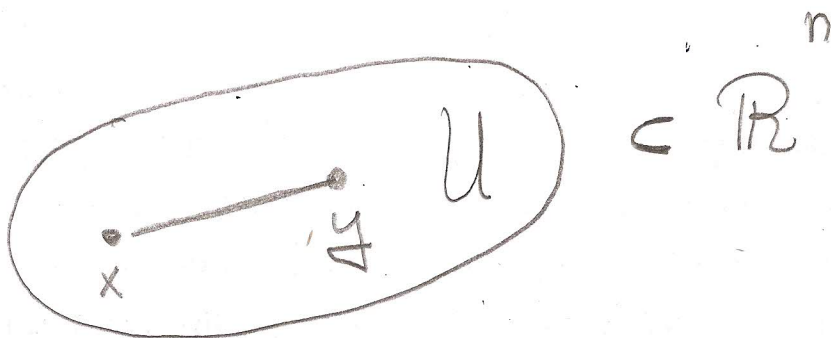
neg. def. $\iff a < 0$ und $\det > 0$

indef. $\iff \det < 0$

hier: $a = 6$, $\det = 27$

Also: $(1,1)$ lokales Minimum

Die Extremwertdiskussion für Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$ geschieht völlig analog zum eindimensionalen Fall - man muss nur das Vorzeichen von $f''(a)$ entsprechend interpretieren. Entsprechendes gilt für die Kriterien für Konvexität:



U Konvexe Menge : $\Leftrightarrow tx + (1-t)y \in U$
 $\forall 0 \leq t \leq 1, x, y \in U;$

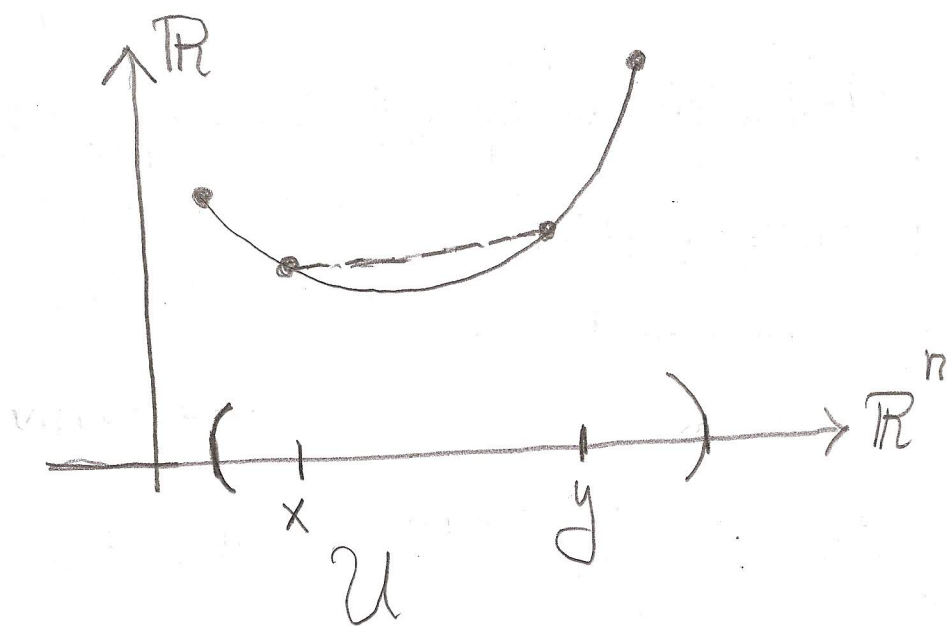
$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ Konvexe Funktion : $\Leftrightarrow$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

$$\forall t \in [0, 1], x, y \in U$$

entsprechend: konkav, streng konvex, ...

-37-



Satz 20.6 : Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex,

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ sei diff'bar. Dann gilt :

(i) f konvex $\iff$

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\forall x, x_0 \in U$$

(ii) f streng konvex $\iff \dots > \dots$

$$\forall x \neq x_0 \in U$$

(iii) (streng) konkav $\Leftrightarrow$

-38-

Bem: Der Graph von f

$$\{(x, f(x)) : x \in U\} =: G(f)$$

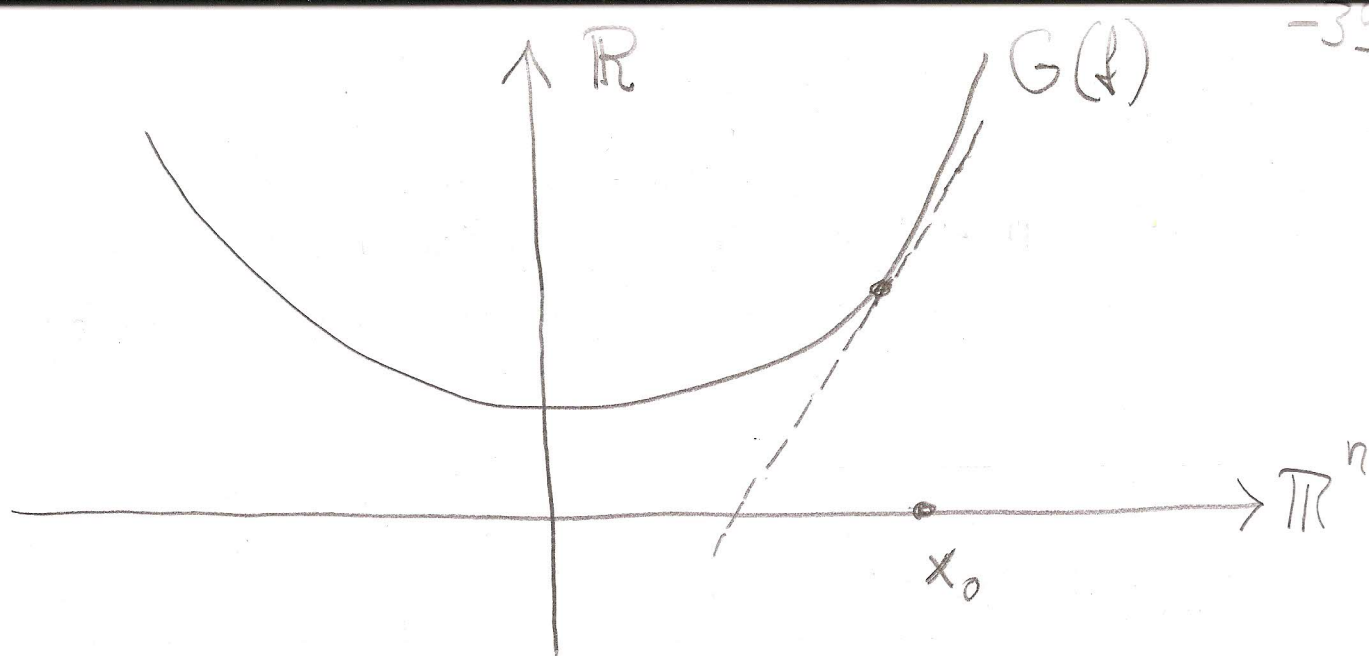
ist eine „Hyperfläche“ in $\mathbb{R}^{n+1}$. Für festes

$x_0 \in U$ ist der Graph von

$$x \mapsto f(x_0) + \nabla f(x_0) (x - x_0) =: L_{x_0}(x)$$

eine n -dim. affine Ebene in $\mathbb{R}^{n+1}$, die mit $G(f)$ den Punkt $(x_0, f(x_0))$ gemeinsam hat. Gemäß (i) gilt:

f konvex $\Leftrightarrow G(f)$ liegt stets
über jeder Stützebene ($=$ Graph
von L_{x_0})



Beweis von 20.6 :

nur (i)! $\implies$ Sei f konvex, fixiere

$x_0, x \in U$. Dann ist mit $v := x - x_0$

für $0 \leq t \leq 1$

$$f(x_0 + tv) = f(tx + (1-t)x_0) \leq$$

$$tf(x) + (1-t)f(x_0) =$$

$$tf(x_0 + v) + (1-t)f(x_0) \implies_{t>0}$$

$$\frac{1}{t} [f(x_0 + tv) - f(x_0)] \leq f(x_0 + v) - f(x_0)$$

Mit $t \downarrow 0$ folgt:

$$\nabla f(x_0) \cdot v = \partial_v f(x_0) \leq f(x_0+v) - f(x_0),$$

also die Beh.

$\Leftarrow$ ": es gilt jetzt

"

$$(1) \quad f(y+w) \geq f(y) + \nabla f(y) \cdot w$$

für alle $y \in U$, $y+w \in U$.

Seien $x_1 \neq x_2 \in U$ sowie $0 < t < 1$.

Wähle in (1)

$$y := tx_1 + (1-t)x_2, \quad w := x_1 - y$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(y+w) \geq$$

$$(2) \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) + \nabla f(y) \cdot (x_1 - y)$$

die Wahl

$$y = t x_1 + (1-t) x_2, \quad w := x_2 - y$$

in (1) ergibt entsprechend:

$$(3) \quad \begin{aligned} f(x_2) &= f(y+w) \gg \\ f(t x_1 + (1-t) x_2) &+ \nabla f(y) \cdot (x_2 - y) \end{aligned}$$

Offenbar:

$$(2) \iff f(x_1) \gg f(y) + \nabla f(y) \cdot (x_1 - x_2)(1-t)$$

$$(3) \iff f(x_2) \gg f(y) + \nabla f(y) \cdot (x_2 - x_1)t$$

multipliziere (2) mit t , (3) mit $(1-t)$

und addiere $\implies$

$$t f(x_1) + (1-t) f(x_2) \gg f(y)$$

